Урок №1 (04.09.2007)
Повторение пройденного. Что осталось.
Механические колебания.

0. Краткий обзор пройденных тем

- Кинематика
- Динамика (+ статика)
- Законы сохранения энергии и импульса в механике
- Механика жидкости и газов
- Термодинамика
- Молекулярно-кинетическая теория
- Электростатика
- Постоянный ток
- Магнитостатика
- Цепи переменного тока
- Переходные процессы в RC- и RL- цепочках

Разговор о том, что осталось.

1. Свободные механические колебания

Груз на пружинке.

Рассматриваем груз массы m, лежащий на гладкой плоскости, прикрепленный с одной стороны к стенке через невесомую идеальную пружину.

Производим малое смещение груза x (малое, в смысле закона Гука). Возникает *возвращающая сила* $F(x) = -kx$ – смысл слова *возвращающая* в знаке «минус».

Отпустим груз. Тогда, по второму закону Ньютона $ma = -kx$.

Вспомним кинематику: что такое *скорость* и что такое *ускорение*? Как математически определить функцию $v(t)$? По определению, $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$. Аналогично, $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$.

Проверим это на примере равнопеременного движения: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$. *Дифференцируя по времени один раз, получаем уравнение скорости* $v(t) = v_0 + at$, *а дифференцируя второй раз, – уравнение ускорения* $a(t) = a$, *т.е. ускорение – константа.*

Итак, для движения груза получается

$m\ddot{x}(t) = -kx(t)$, или $\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$.

Обратим внимание, что $\ddot{x}(t)$ *– это не просто какая-то функция времени, а именно вторая производная функции* $x(t)$, *т.е. они <u>взаимосвязаны</u>.*

Заметим, что получившееся равенство есть, по сути дела, уравнение относительно $x(t)$, т.е. для того, чтобы выяснить, как будет двигаться груз, нам надо найти функцию $x(t)$, которая *при любых* t, превращала бы полученное выражение в тождество. Такое уравнение называется *дифференциальным уравнением второго порядка*.

Решается оно «угадыванием». Пусть, скажем, $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$. Тогда $\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$ и $\ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha)$.

Подставляя $x(t)$ и $\ddot{x}(t)$ в наше уравнение, получим: $-A\omega^2\sin(\omega t + \alpha) + \frac{k}{m}A\sin(\omega t + \alpha) = 0$, откуда получаем, что при $\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$ наше уравнение превращается в тождество при любых значениях времени.

Итак, мы решили наше дифференциальное уравнение второго порядка! Рассмотрим наше решение:

$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$, где $\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Терминология.

Введем терминологию: A – *амплитуда* колебаний; ω – *циклическая частота* колебаний; α – *начальная фаза* колебаний, а весь аргумент синуса называется *фазой* колебаний. Любая физическая система, движущаяся по полученному закону, называется *гармоническим осциллятором*.

Обратим внимание, что A и α остались неопределенными константами. Они определяются *начальными условиями*.

Связь между периодом T, частотой f и циклической частотой ω: $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$.

Частота f измеряется в *герцах*, круговая частота ω – в радианах в секунду (рад/с).

Изохронность осциллятора.

Заметим, что частота собственных колебаний нашего осциллятора не зависит от начальных условий. Т.е. если мы оттянем пружину на 1 см или на 1 м, частота колебаний не изменится!

Математический маятник.

В простейшем случае полагаем, что ускорение направлено тангенциально. В этом случае $a = -g\sin\theta$, где θ – угол наклона маятника. Т.е. $\ddot{\theta}(t) = \frac{a(t)}{l} = -\frac{g}{l}\sin\theta \approx -\frac{g}{l}\theta$, при малых отклонениях, где l – длина нити маятника. Отсюда получаем циклическую частоту малых колебаний математического маятника: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.